Mühazirə 1

Topologiya aksiomları. Topoloji fəza. Açıq və qapalı çoxluqlar, onların xassələri. Topoloji fəzanın bazası

1. Metrik fəzada açıq çoxluqların IV mühazirədə ifadə olunan xassələrinə (teorem 2) əsaslanaraq, topoloji fəza anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, X çoxluğunda müəyyən qayda ilə aşağıdakı xassələrə malik olan τ alt çoxluqlar sistemi seçilmişdir:

I. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü τ sisteminə daxildirlər.

II. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən ailəsinin birləşməsi τ sisteminə daxildir.

III. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən sonlu ailəsinin kəsişməsi τ sisteminə daxildir.

Bu halda deyirlər ki, X çoxluğu üzərində *topoloji struktur* (və ya *topologiya*) təyin olunmuşdur. (X,τ) cütünü isə *topoloji fəza* adlandırırlar. I,II,III xassələrinə *topoloji struktur aksiomları* deyilir.

X çoxluğunun elementləri (X,τ) topoloji fəzasının *nöqtələri*, τ sistemindən olan elementlər isə bu fəzanın *açıq çoxluqları* adlanır. Əgər X çoxluğu üzərində hansı τ topologiyasının seçildiyi artıq məlumdursa, onda (X,τ) topoloji fəzasını X ilə də işarə edirlər.

Topoloji fəzalara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. (X,ρ) metrik fəzasını nəzərdən keçirək. IV mühazirədə verilən teorem 2-dən müəyyən edirik ki, (X,ρ) metrik fəzası topoloji fəzadır. Bu topoloji fəzanın τ topologiyası açıq kürələrin köməyi ilə verilir (IV mühazirədə, bənd 2-də (X,ρ) fəzasında açıq çoxluğun tərifinə baxın) və ρ metrikasının *doğurduğu* topologiya adlanır.

Misal 2. R^n arifmetik fəzasında açıq çoxluq anlayışını bu şəkildə daxil etmək olar. n sayda $(a^i,b^i)\,(i=1,2,...,n)$ intervallarını götürək. $a^i < x^i < b^i$ $(i=1,2,...,n)$ şərtini ödəyən bütün $M(x^1,x^2,...,x^n)$ nöqtələri çoxluğunu açıq koordinat paralelepipedi adlandıraq.

Əgər $F \subset R^n$ çoxluğu hər bir nöqtəsi ilə bərabər öu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən açıq koordinat parale-lepipedini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandırırıq. $\varnothing$ çoxluğu açıq çoxluq qəbul edirik. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə təyin edilən bütün açıq çoxluqlar ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir və deməli, R^n çoxluğu üzərində müəyyən topologiya təyin edir. Bu topologiyanı *təbii topologiya* adlandırırlar. Təbii topologiya R^n çoxluğunu topoloji fəzaya çevirir. Bu topoloji fəza *ədədi fəza* ($n=1$ olduqda *ədəd düz xətti*) adlanır.

Misal 3. A_2 afin müstəvisində $ABCD = P$ paraleloqra-mına baxaq. $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}, 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$ şərtini ödəyən bütün M nöqtələrinin $\overset{\circ}{P}$ çoxluğu P paraleloqramının daxili hissəsi adlanır. Əgər $F \subset A_2$ çoxluğunu hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən paraleloqramın daxili hissəsini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandıraq. Tərifə görə hər bir $M \in F$ nöqtəsi üçün elə P parale-loqramı vardır ki, onun $\overset{\circ}{P}$ daxili hissəsi $M \in \overset{\circ}{P} \subset F$ şərtini ödəyir.

Yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə A_2 müstəvisində təyin edilən açıq çoxluqların τ ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir. Beləliklə, afin müstəvi topoloji fəzadır. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, A_n afin fəzası topoloji fəzadır.

Misal 4. İxtiyari X çoxluğunda bu X çoxluğunun özündən və $\varnothing$ boş çoxluğundan ibarət olan $\tau = \{X, \varnothing\}$ ailəsinə baxaq. Aşkardır ki, alt çoxluqların τ ailəsi I,II və III aksiom-larını ödəyir, yəni τ - X çoxluğunda təyin edilmiş topologiyadır. Bu topologiya *antidiskret* (və ya *trivial*) *topologiya*, (X, τ) fəzası isə *antidiskret topoloji fəza* adlanır.

Misal 5. Tutaq ki, X -ixtiyari çoxluqdur, $\tau = P(X)$ isə X çoxluğunun bütün alt çoxluqları ailəsidir. I, II,III aksiom-larının ödənilməsi aşkardır. Bu topologiya *diskret topologiya*, (X, τ) fəzası isə *diskret topoloji fəza* adlanır.

4,5 misalları göstərirlər ki, istənilən X çoxluğunu topo-loji fəzaya çevirmək olar.

2. Tutaq ki, (X,τ) -topoloji fəzadır. X topoloji fəza-sında açıq çoxluqların tamamlayıcılarına *qapalı çoxluqlar* deyilir. Aşkardır ki, X topoloji fəzasında qapalı çoxluqlar üçün aşağıdakı ikili xassələr doğrudur:

I'. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü qapalı çoxluqlardır.

II'. Qapalı çoxluqların ixtiyari ailəsinin kəsişməsi qapalı çoxluqdur.

III'. Qapalı çoxluqların ixtiyari sonlu ailəsinin birləşməsi qapalı çoxluqdur.

Bu xassələrin doğruluğu mühazirə 4-də verilən De-Morqan düsturlarından bilavasitə alınır.

Beləliklə, X çoxluğu üzərində topologiyanın verilməsi üçün açıq çoxluqlar ailəsi əvəzinə I', II', III' şərtlərini ödəyən çoxluqlar ailəsini təyin etmək və bu çoxluqları qapalı çoxluqlar adlandırmaq olar.

Topoloji fəzalarda metrik fəzalara aid olan bir sıra mühüm anlayışları daxil etmək mümkündür. X topoloji fəzasının x *nöqtəsinin ətrafı* bu nöqtəni özündə saxlayan ixtiyari açıq çoxluğa deyilir. Analogiyaya görə, Y alt çoxluğunu özündə saxlayan açıq çoxluq Y *çoxluğunun ətrafı* adlanır. $Y \subset X$ çoxluğunun *toxunma nöqtəsi* elə x nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin hər bir ətrafı Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *qapanması* adlanır və $\overline{Y}$ ilə işarə olunur. Y çoxluğu-nun *daxili nöqtəsi* elə $x \in Y$ nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin Y çoxluğuna daxil olan müəyyən ətrafı vardır. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *daxili hissəsi* adlanır və $IntY$ ilə işarə olunur.

Teorem 1. *$Y \subset X$ çoxluğu yalnız və yalnız $Y = \overline{Y}$ olduqda qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $Y-$qapalı çoxluqdur, yəni $X \setminus Y-$açıq çoxluqdur. Onda $X \setminus Y$ çoxluğu özünün ixtiyari nöqtəsinin ətrafıdır, yəni $X \setminus Y$ çoxluğunun nöqtələri Y çoxluğunun toxunma nöqtələri olmurlar. Ona görə də $\overline{Y} \subset Y$. Digər tərəfdən, $Y \subset \overline{Y}$ olması aşkardır. Beləliklə, $Y = \overline{Y}$.

Tərsinə, tutaq ki, $Y = \overline{Y}$. Bu o deməkdir ki, əgər $x \notin Y$ olarsa, onda x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil, yəni onun müəyyən U_x ətrafı

Y çoxluğu ilə kəsişmir: $U_x \subset X \setminus Y$. Buradan alınır ki, $X \setminus Y$ çoxluğu U_x açıq çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilə bilər:

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x \,. \qquad (1)$$

(1) bərabərliyindən II topologiya aksiomuna əsasən alırıq ki, $X \setminus Y$- açıq çoxluqdur. ■

Teorem 2. *X topoloji fəzasının ixtiyari Y çoxluğunun $\overline{Y}$ qapanması qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Teorem 1-ə əsasən, $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliyinin doğrulu-ğunu göstərmək yetərlidir. $\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ olması aşkardır. $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ tərs daxil olmasının doğru olduğunu əsaslandıraq. Tutaq ki, $x \in \overline{\overline{Y}}$. Bu o deməkdir ki, x nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı $\overline{Y}$ çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir: $U \cap \overline{Y} \neq \varnothing$. Fərz edək ki, $y \in U \cap \overline{Y}$. Onda U çoxluğu y nöqtəsinin ətrafıdır. Digər tərəfdən, $y \in \overline{Y}$ olduğundan, U çoxluğu Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Beləliklə, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsidir, yəni $x \in \overline{Y}$. Buradan $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ daxil olması və
$\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ şərti daxilində $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliy■alınır.

Tutaq ki, bizə (X, τ) topoloji fəzası verilmişdir. Bu fəzanın açıq çoxluqlarının müəyyən $\mathrm{B} = \{U_\alpha\}, \alpha \in I$ ailəsinə baxaq. Əgər $\forall x \in X$ nöqtəsi və onun istənilən U_x ətrafı üçün elə $B_x \in \mathrm{B}$ çoxluğu vardırsa ki, $x \in B_x \subset U_x$ onda deyirlər ki, B ailəsi τ topologiyasının bazasıdır.

Teorem. $\mathrm{B} = \{U_\alpha\}, \alpha \in I$ ailəsinin τ topologiyasının bazası olması üçün zəruri və kafi şərt τ topologiyasından götürülən istənilən açıq çoxluğun B ailəsinin müəyyən çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilməsidir.

Mühazirə 2

Kəsilməz inikaslar. Homeomorfizm. Hausdorf topoloji fəzalar

Riyazi analiz kursunda ədədi arqumentli kəsilməz funksiyalar mühüm rol oynayırlar. Bu funksiyaların ümumi-ləşməsi həndəsədə əhəmiyyətli yeri olan kəsilməz inikaslardır.

1. Tutaq ki, (X,τ) və $(Y,T)-$topoloji fəzalardır. Bu topoloji fəzaların $f:X\to Y$ inikasına baxaq. Əgər $f(x_0)\in Y$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafı üçün $x_0\in X$ nöqtəsinin $f(U)\subset Y$ şərtini ödəyən U ətrafı vardırsa, onda deyirlər ki, f inikası $x_0\in X$ *nöqtəsində kəsilməzdir*. f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməz olduqda ona *kəsilməz inikas* deyilir. Qeyd edək ki, X və Y fəzaları R ədəd düz xətti ilə üst-üstə düşdükdə kəsilməz inikasın tərifi $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyinin riyazi analiz kursundan məlum olan tərifi ilə eyniləşir.

Aşağıdakı teorem inikasın kəsilməzlik əlamətini ifadə edir.

Teorem 1. $f:X\to Y$ *inikası yalnız və yalnız aşağıdakı ekvivalent şərtlərdən biri ödənildikdə kəsilməzdir*:

$a)$ Y *fəzasından olan ixtiyari açıq çoxluğun proobrazı* X *fəzasında açıq çoxluqdur;*

$b)$ Y *fəzasından olan ixtiyari qapalı çoxluğun proobrazı* X *fəzasında qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Proobrazlar üçün $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$ müna-sibəti ödənildiyindən, $a)$ və $b)$ şərtləri ekvivalentdir. Fərz edək ki, $f-$ kəsilməz inikasdır, $V\subset Y-$açıq çoxluqdur. Göstərək ki, V çoxluğunun $f^{-1}(V)$ proobrazı açıq çoxluqdur. Tutaq ki, $x\in X$, onda $f(x)\in V$, yəni V açıq çoxluğu $f(x)$ nöqtəsinin ətrafıdır. Onda f inikasının kəsilməzliyinin tərifinə əsasən x nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $f(U)\subset Y$, yaxud $U\subset f^{-1}(V)$. Sonuncu münasibət $f^{-1}(V)$ çoxluğunun açıq çoxluq olduğunu göstərir. Tərsinə: tutaq ki, $a)$ şərti ödənilir. İsbat edək ki, f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir. Hər hansı $x\in X$ nöqtəsini götürək və $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafına baxaq. Şərtə görə V çoxluğunun U proobrazı

$X-$də açıq çoxluqdur. Beləliklə, $x \in U$ və $f(U) \subset V$, yəni $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafı üçün x nöqtəsinin $f(U) \subset Y$ şərtini ödəyən U ətrafı vardır. Tərifə görə bu, f inikasının x nöqtəsində kəsilməz olması deməkdir. ■

Kəsilməz inikaslara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. İxtiyari X topoloji fəzasının özünün özünə *eynilik inikası* kəsilməzdir. Bu inikas Id_X kimi işarə olunur:

$$Id_X : X \to X, \quad x \mapsto x.$$

Misal 2. Sabit inikas həmişə kəsilməzdir. Tutaq ki, $X, Y-$topoloji fəzalardır, $y_0 \in Y-$müəyyən nöqtədir, f isə sabit inikasdır:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto y_0.$$

Onda ixtiyari $U \subset Y$ açıq çoxluğunun proobrazı, $y_0 \in U$ olduqda X fəzası ilə üst-üstə düşür və əks halda $\varnothing$ olur.

Misal 3. Diskret topoloji fəzanın hər hansı topoloji fəzaya ixtiyari inikası kəsilməzdir.

Misal 4. İxtiyari topoloji fəzanın antidiskret fəzaya istənilən inikası kəsilməz inikasdır.

Teorem 2. *Kəsilməz inikasların kompozisiyası kəsilməzdir.*

İsbatı. Göstərək ki, əgər $X, Y, Z-$topoloji fəzalardırsa və $f : X \to Y$ və $g : Y \to Z$ -kəsilməz inikaslardırsa, onda bu inikasların $g \circ f : X \to Z$ kompozisiyası kəsilməzdir. $h = g \circ f$ işarə edək. Tutaq ki, $U \subset Z$ -ixtiyari açıq çoxluqdur. g kəsilməz inikas olduğundan, $g^{-1}(U)$ çoxluğu $Y-$də açıqdır. $g^{-1}(U)$ çoxluğunun $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ proobrazı isə f inikasının kəsilməzli-yinə görə $X-$də açıqdır. $h^{-1}(U) = f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ olduğundan buradan h kompozisiya inikasının kəsilməz olması alınır.

2. X topoloji fəzasının Y topoloji fəzasına $f : X \to Y$ inikasına baxaq. Əgər f inikası qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı kəsilməzdirsə, onda deyirlər ki, f *homeomorfizmdir.* Bu o deməkdir ki, f inikası iki şərti ödəyir: 1) $f-$biyeksiyadır; 2) f və $f^{-1}-$kəsilməz inikaslardır. Əgər $f : X \to Y$ homeomorfizmi vardırsa, bu halda X və Y fəzaları *homeomorf* fəzalar adlanır və $X \cong Y$, yaxud $X \cong_f Y$ yazılır.

İnikasın kəsilməzliyinidən və qarşılıqlı birqiymətliliyindən tərs inikasın kəsilməzliyi həmişə alınmır. Məsələn, $X = \{a,b\}$ və $Y = \{c,d\}$ ikinöqtəli topoloji fəzalalarına baxaq. Əgər X fəzası diskret, Y fəzası isə antidiskret fəzadırsa, onda $f : X \to Y$, $a \mapsto c, b \mapsto d$ inikası kəsilməz və biyektiv inikasdır. Lakin bu inikasın tərsi kəsilməz deyil.

Homeomorfizmlərə dair nümunələr göstərək.

Misal 5. Diskret fəzanın diskret fəzaya biyektiv inikası homeomorfizmdir. Bu aşkardır.

Misal 6. Antidiskret fəzanın antidiskret fəzaya biyektiv inikası homeomorfizmdir.

Homeomorfizmlərin sadə, lakin çox mühüm olan xassələrini qeyd edək.

Teorem 3. *a) İxtiyari topoloji fəzanın özünün özünə eynilik inikası homeomorfizmdir.*

b) Homeomorfizmin tərsi olan inikas homeomorfizmdir.

c) İki homeomorfizmin kompozisiyası homeomorfizmdir.

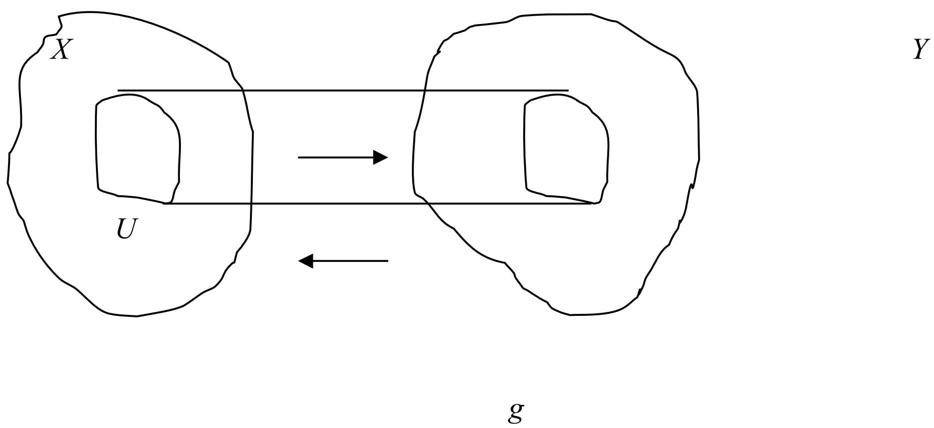
İsbatı. $a)$ və $b)$ hökmləri aşkardır. $c)$ hökmünün doğruluğunu isbat edək. Tutaq ki, $f : X \to Y$ və $g : Y \to Z -$homeomorfizmlərdir. Onda $h = g \circ f : X \to Z$ kompozisiya inikası f və g inikaslarının kəsilməzliyinə görə kəsilməzdir (bax teorem 2). f və g biyektiv inikaslar olduqlarından, h inikası biyeksiyadır. Digər tərəfdən, f^{-1} və g^{-1} inikasları kəsilməz olduqlarından,

$$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$$

tərs inikası kəsilməzdir. Beləliklə, h inikası homeomorfizmdir. $\blacksquare$

Teorem 4. *Homeomorfizm zamanı ixtiyari açıq çoxluğun obrazı açıq çoxluqdur, ixtiyari qapalı çoxluğun obrazı isə qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Tutaq ki, $f:X\to Y$-homeomorfizmdir, $g=f^{-1}:Y\to X-$tərs inikasdır və $U\subset X-$açıq çoxluqdur. Onda $f(U)=g^{-1}(U)$ çoxluğu g inikasının kəsilməzliyinə görə açıq çoxluqdur (şək. 1).



Şəkil 1

Qapalı çoxluğun proobrazının qapalı olması oxşar şəkildə əsaslandırılır. ■

Teorem 4-dən məlum olur ki, $f:X\to Y$ *homeomorfizmi* X *və* Y *topoloji fəzalarının topoloji strukturları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin edir.* Beləliklə, topoloji nöqteyi-nəzərdən homeomorf fəzalar tamamilə eyni şəkildə qurulmuşdurlar və $X\to Y$ homeomorfizmi X və Y fəzalarında topoloji struktur terminlərində təyin olunan bütün xassələri eyniləşdirir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. *Homeomorfluq münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.* Bundan ötrü ekvivalentlik münasibətinin tərifinə aid olan üç xassənin ödənildiyini yoxlamaq lazımdır:

$a)$ R e f l e k s i v l i k. Hər bir topoloji fəza özü-özünə homeomorfdur:

$$X\cong X.$$

$b)$ S i m m e t r i k l i k. Əgər X fəzası Y fəzasına homeomorfdursa, onda Y fəzası da X fəzasına homeomorfdur:

$$X \cong Y \Rightarrow Y \cong X.$$

$c)$ T r a n z i t i v l i k. Əgər X fəzası Y fəzasına, Y fəzası isə Z fəzasına homeomorfdursa, onda X fəzası Z fəzasına homeomorfdur:

$$X \cong Y, Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.$$

İsbatı. Müvafiq homeorfizmləri göstərmək kifayətdir. $a)$ halında bu Id_X eynilik inikasıdır. $b)$ halında bu $f^{-1}: Y \to X$ tərs inikasıdır, burada $f: X \to Y$- əvvəlcədən verilən homenomorfizmdir. $c)$ halında isə bu $g \circ f: X \to Z$ inikasıdır, burada $f: X \to Y$ və $g: Y \to Z -$ əvvəlcədən verilən homeo-morfizmlərdir. Bu mülahizələr simvolik şəkildə belə yazılır:

$a)$ $X \cong_{Id} X;$

$b)$ $X \cong_f Y \Rightarrow Y \cong_{f^{-1}} X;$

$c)$ $X \cong_f Y, Y \cong_g Z \Rightarrow X \cong_{g \circ f} X.$ ■

Beləliklə, bütün topoloji fəzalar homeomorfluq münasibətinə nəzərən ekvivalentlik siniflərinə ayrılırlar. Bu siniflərə, yəni $M/_{\cong}$ faktor-çoxluğunun elementlərinə *topoloji tiplər* deyilir, burada $M -$ topoloji fəzalar çoxluğudur.. Yalnız və yalnız homeomorf topoloji fəzalar eyni topoloji tipə malikdirlər.

(X, τ) fəzasının homeomorfizmlər zamanı dəyişməyən xassələrinə *topoloji xassələr* (və ya *topoloji invariantlar*) deyilir. Topoloji xassələr elə xassələrdir ki, onlara homeomorf fəzalar ya malikdirlər, ya da malik deyildirlər. Məsələn, diskretlik, antidiskretlik, kompaktlıq və rabitəlilik xassələri topoloji xassələrdir. Topoloji xassələrin öyrənilməsi topologiyanın predmetini təşkil edir. XIX əsrdə, topologiyanın predmetinin hələ Evklid fəzasında çoxluqlarla məhdudlaşdığı bir vaxda görkəmli riyaziyyatçı F.Kleyn topologiyanı həndəsənin fiqurların homeomorfizmlər zamanı dəyişməyən xassələrini öyrənən bir tərkib hissəsi kimi təyin etmişdir. Bu, topologiyanı həndəsənin digər tərkib hissələrindən olan Evklid həndəsəsi, hiperbolik həndəsə, proyektiv həndəsə, afin həndəsə və sferik həndəsə ilə bir sıraya gətirib çıxarmışdır.

3. Kəsilməz inikasların bir mühüm xüsusi halı kəsilməz funksiyalardır, yəni topoloji X fəzasının R həqiqi ədədlər çoxluğuna kəsilməz inikaslarıdır. f funksiyasının kəsilməzliyini belə ifadə etmək olar: ixtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün x_0 nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $y \in U$ olduqda $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Tutaq ki, $f : X \to Y -$metrik fəzaların kəsilməz inikasıdır, $\rho_1, \rho_2 - X, Y$ fəzaları üzərində metrikalardır. Onda f inikasının kəsilməzlik şərtini belə ifadə edə bilərik: ixtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $\rho_1(x, x_0) < \delta$ bərabərsizliyindən $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ bərabərsizliyi alınır.

Metrik fəzalar üçün ədədi ardıcıllığın yığılması anlayışının ümumiləşdirilməsi də faydalıdır. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x) = 0$ olduqda deyirlər ki, $\{x_n\}$ nöqtələr ardıcıllığı x_0 nöqtəsinə yığılır: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Fəzaların və inikasların bir çox xassələrini metrik fəzanın yığılan ardıcıllıqları terminləri ilə ifadə etmək olar. Məsələn, $Y \subset X$ çoxluğu verildikdə, əgər ixtiyari yığılan $\{x_n\}$ nöqtələr ardıcıllığı üçün $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limiti də Y çoxluğuna aid olarsa, onda Y qapalı çoxluqdur. Metrik fəzaların $f : X \to Y$ inikasının kəsilməzlik şərtini Heyne mənada belə ifadə etmək olar: əgər $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ bərabərliyindən $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ bərabərliyi alınırsa, onda deyirlər ki, f inikası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

4. Tutaq ki, X və Y topoloji fəzalardır. Yeni $X \times Y$ topoloji fəzasını təyin edək. $X \times Y$ çoxluğu X *və* Y *çoxluqlarının dekart hasilidir*:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

$X \times Y$ çoxluğunda topologiya təyin edək. $U = \bigcup\limits_{\alpha} (V_\alpha \times W_\alpha)$ birləşməsi şəklində göstərilən $U \subset X \times Y$ çoxluğunu açıq çoxluq adlandırırıq, burada

$V_\alpha \subset X, W_\alpha \subset Y -$ açıq çoxluqlardır. Açıq çoxluqların xassələrinin ödənilməsi asanlıqla yoxlanılır. Bu qaydada topologiyanın daxil edildiyi $X \times Y$ çoxluğu X *və* Y *topoloji fəzalaının dekart hasili* adlanır. X və Y topoloji fəzaları $X \times Y$ dekart hasilinin *vuruqları* adlanır. Dekart hasillərin aşağıdakı xassələri doğrudur: $a)$ $X \times Y$ və $Y \times X$ fəzaları homeomorfdurlar; $b)$ $(X \times Y) \times Z$ və $X \times (Y \times Z)$ fəzaları homeomorfdurlar. Birinci halda homeomorfizm olaraq, $\varphi(x, y) = (y, x)$ şəklində təsir edən $\varphi : X \times Y \to Y \times X$ inikası götürülür. $U = \bigcup_\alpha (V_\alpha \times W_\alpha)$ $X \times Y$ fəzasının açıq çoxluğu olduqda, $\varphi(U) = \bigcup_\alpha (W_\alpha \times V_\alpha)$ - $Y \times X$ fəzasının açıq çoxluğu olur. İkinci halda homeomorfizm olaraq, $\varphi((x, y), z) = (x, (y, z))$ şəklində təsir edən $\varphi : (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ inikasını götürmək lazımdır. $X \times Y$ dekart hasilinin vuruqlardan birinin, məsələn X fəzasının üzərinə $f(x, y) = x$ şəklində təsir edən $f : X \times Y \to X$ proyeksiyası kəsilməzdir. Doğrudan da, $U \subset X$ açıq çoxluğunun proobrazı $f^{-1}(U) = U \times Y$ şəklindədir, yəni $f^{-1}(U)$ açıq çoxluqdur.

T_2 **aksiomu:** *Fəzada ixtiyari iki müxtəlif nöqtənin bir-biri ilə kəsişməyən ətrafları vardır*: $\forall x, y \in X, x \neq y$ üçün $\exists U \ni x, V \ni y$ ətrafları vardır ki, $U \cap V = \varnothing$.

T_2 aksiomunu ödəyən fəzaya T_2 və ya *Hausdorf fəzası* deyilir. Aşkardır ki, nöqtələrinin sayı ikidən az olmayan ixtiyari diskret fəza Hausdorf fəzasıdır. Doğrudan da, əgər X diskret fəzadırsa, onda $\forall x, y \in X, x \neq y$ nöqtələri üçün $\{x\}$ və $\{y\}$ açıq çoxluqları bu nöqtələrin kəsişməyən ətraflarıdır. İstənilən metrik M fəzası Hausdorf fəzasıdır. Əgər $x, y \in M -$ müxtəlif nöqtələrdirsə, onda bu nöqtələrin kəsişməyən ətrafları olaraq $\frac{1}{2}\rho(x, y)$ radiuslu kürəvi ətraflarını götürmək olar.

Mühazirə 3

Hamar çoxobrazlı anlayışı. Hamar çoxobrazlılara dair nümunələr

Tutaq ki, $M-$hesabi bazaya malik Hausdorf topoloji fəzasıdır. $U \subset M$ açıq çoxluğuna baxaq. $\varphi : U \to R^n$ homeomorfizminə M topoloji fəzası üzərində təyin edilmiş $n-$ölçülü lokal xəritə (və ya lokal koordinat sistemi) deyilir. U çoxluğu lokal xəritənin oblastı adlanır. Lokal xəritənin özünü (U,φ) şəklində işarə edirlər.

Tutaq ki, M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü iki (U,φ) və (V,ψ) lokal xəritələri verilmişdir. Əgər

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Inikasları hamar inikaslardırsa, o halda deyirlər ki, (U,φ) və (V,ψ) hamar əlaqələndirilmiş lokal xəritələrdir. $U \cap V = \varnothing$ olduqda $\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \psi^{-1}$ inikasları tətin olunmurlar. Bu halda (U,φ) və (V,ψ) lokal xəritələrinin hamar əlaqələndirilmiş olduqlarını qəbul edirik.

Tutaq ki, (U,φ)-M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü lokal xəritədir. $P \in U$ nöqtəsinin (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən lokal koordinatları dedikdə $\varphi(P) \in R^n$ nöqtəsinin koordinatları başa düşülür. Bu koordinatları $\left(x^1(P), x^2(P), ..., x^n(P)\right)$ kimi işarə edəcəyik.

Tutaq ki, M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü iki (U,φ) və (V,ψ) lokal xəritələri verilmişdir və $U \cap V \neq \varnothing.$ Əgər $P \in U \cap V$ olarsa, onda $\psi \circ \varphi^{-1}$ inikası $\varphi(P) = \left(x^1(P), ..., x^n(P)\right)$ nöqtəsini $\psi(P) = \left(y^1(P), ..., y^n(P)\right)$ çevirir, belə ki, burada $y^1, ..., y^n$ n sayda $x^1, ..., x^n$ dəyişənlərindən asılı funksiyalardır:

$$y^i = f^i(x^1, ..., x^n), 1 \le i \le n.$$

Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə M topoloji fəzası üzərində təyin olunmuş $n-$ölçülü lokal xəritələrin $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_A$ ailəsinə M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü hamar atlas (və ya diferensiallanan struktur) deyilir:

1) atlasa daxil olan istənilən iki xəritə hamar əlaqələndirilmişdir;

2) $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = M$, yəni atlasın bütün lokal xəritələrinin oblastları M topoloji fəzasını örtürlər.

Üzərində $n-$ölçülü hamar atlasın təyin olunduğu M topoloji fəzasına $n-$ölçülü hamar (və ya diferensiallanan) çoxobrazlı deyilir.

Mühazirə 4

Hamar çoxobrazlıların hamar (diferensiallanan) inikasları

Tutaq ki, $M - m-$ölçülü, $N - n-$ölçülü hamar çoxobrazlıdır. $f : M \to N$ kəsilməz inikasına baxaq. $(U, \varphi) - M$ çoxobrazlısı üzərində, $(V, \psi) - N$ çoxobrazlısı üzərində lokal xəritələr olsun. $f^{-1}(V)$ alt çoxluğu $M-$də açıq çoxluqdur. $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$ olduqda

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V) \tag{1}$$

Inikasını qurmaq mümkündür. Bu inikas zamanı $P \in U \cap f^{-1}(V)$ nöqtəsinin (U, φ) lokal xəritəsinə nəzərən koordinatlarından ibarət olan $(x^1, ..., x^m)$ ədədlər sətrinə $f(P)$ nöqtəsinin (V, ψ) lokal koordinatlarından ibarət olan $(y^1, ..., y^n)$ sətri qarşı qoyulur.

(1) inikasına $f : M \to N$ inikasının (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələrinə nəzərən koordinat ifadəsi deyilir.

Əgər uyğun olaraq, M və N çoxobrazlıları üzərində verilən ixtiyari (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələrinə nəzərən (1) koordinat ifadəsi hamar inikas olarsa, onda $f : M \to N$ kəsilməz inikası hamar inikas adlanır. Bu zaman $U \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ olduqda, koordinat ifadəsinin hamar olması qəbul olunur.

Teorem 1. Kəsilməz $f : M \to N$ inikasının hamar olması üçün zəruri və kafi şərt hər bir $P \in M$ nöqtəsi üçün uyğun olaraq, M və N çoxobrazlıları üzərində elə (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələrinin varlığıdar ki, $P \in U, f(P) \in V$ və bu xəritələr üçün $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ koordinat ifadəsi $\varphi(P)$ nöqtəsində hamardır.

Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə, $f : M \to N$ inikası difeomorfizm adlanır:

1) $f-$homeomorfizmdir;

2) f və f^{-1} hamar inikaslardır.

Məsələn, səthlərin istənilən difeomorfizmi çoxobrazlıların difeomorfizmidir. Digər tərəfdən, əgər $(U,\varphi)-M$ hamar çoxobrazlısı üzərində lokal xəritədirsə, onda göstərmək olur ki, $\varphi:U\to\varphi(U)$ inikası difeomorfizmdir.

Mühazirə 5

Çoxobrazlıya toxunan vektorlar. Toxunan fəza

Tutaq ki, $M-n-$ölçülü hamar çoxobrazlı, I isə R ədəd oxunun açıq intervalıdır. Aşkardır ki, I açıq intervalı $R-$də açıq alt çoxobrazlı kimi bir ölçülü çoxobrazlıdır. Ona görə də $\gamma:I\to M$ inikasının hamarlığını çoxobrazlıların hamar inikası şəklində başa düşmək olar.

M çoxobrazlısı üzərində hamar əyri (və ya sadəcə əyri) $\gamma:I\to M$ hamar inikasına deyilir. Əgər $t_0\in I$ üçün $\gamma(t_0)=P$ olarsa, onda deyirlər ki, əyri $t=t_0$ olduqda P nöqtəsindən keçir.

Əgər $(U,\varphi)-M$ çoxobrazlısı üzərində lokal xəritədirsə və $\gamma:I\to M$ əyrisi üçün $\gamma(I)\subset U$ olarsa, onda R^n fəzasının $\varphi(U)$ oblastında $\tilde{\gamma}=\varphi\circ\gamma:I\to\varphi(U)$ əyrisinə γ əyrisinin (U,φ) xəritəsinin lokal koordinatlarında verilməsi deyilir.

(U,φ) lokal xəritəsinin verilməsi ilə $P\in U$ nöqtəsindən keçən hər bir hamar γ əyrisinə $\tilde{\gamma}:I_\varepsilon\to\varphi(U)$ əyrisinin t_0 nöqtəsində sürət vektoru olan

$$\frac{d\tilde{\gamma}(t_0)}{dt}=\left\{\frac{du^1(t_0)}{dt},\ldots,\frac{du^n(t_0)}{dt}\right\}$$

vektorunu qarşı qoymaq olur, burada $I_\varepsilon=\left]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon\right[,\varepsilon>0.$

M çoxobrazlısı üzərində P nöqtəsindən keçən iki hamar əyri üçün bu əyrilərə yuxarıdakı qaydada qarşı qoyulan vektorlar üst-üstə düşürlərsə, onda deyirlər ki, verilən hamar əyrilər P nöqtəsində bir-birinə toxunurlar.

M çoxobrazlısı üzərində P nöqtəsində bir-birinə toxunan hamar əyrilərin ekvivalentlik sinfinə P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan vektor deyilir.

P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan vektorlar çoxluğu $T_P M$ kimi işarə olunur. $T_P M$ $n-$ölçülü vektorlar fəzasıdır və P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan fəza adlanır.

R^n fəzasının $e_1,...,e_n$ kanonik bazisinə $T_P M$ toxunan fəzasında uyğun gələn bazisi hərəkətli bazis adlandırırlar və $\partial_{1P},...,\partial_{nP}$ kimi işarə edirlər.

Mühazirə 6

Toxunan vektor funksiyalar halqasının diferensiallanması kimi

Tutaq ki, $M - n-$ölçülü hamar çoxobrazlı, $v \in T_P M - P$ nöqtəsində toxunan vektor, $\gamma : I \to M - t = t_0$ olduqda P nöqtəsindən keçən elə hamar əyridir ki, $v = [\gamma]$, burada $[\gamma] - \gamma$ əyrisi ilə təyin olunan ekvivalentlik sinfidir. $P \in O_f \subset M$ çərtini ödəyən açıq O_f alt çoxluğunda təyin olunmuş hamar $f : O_f \to R$ funksiyasına baxaq. $(U, \varphi), P \in U$ lokal xəritəsini daxil edək. Onda γ əyrisi $\widetilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ əyrisinin lokal koordinatlarında təyin olunur, f funksiyasına isə $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ şəklində işarə edəcəyimiz $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap O_f) \to R$ koordinat ifadəsi uyğun gəlir.

$v \in T_P M$ toxunan vektorunun köməyi ilə P nöqtəsinin ətrafında təyin olunmuş hər bir hamar f funksiyasına

$$D_v f = \frac{d(f \circ \gamma)(t_0)}{dt} = \left. \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u^i} \right|_{\varphi(P)} \frac{du^i(t_0)}{dt}$$

ədədini qarşı qoymaq olur.

$C^\infty(P) = \{ f : O_f \to R \mid, \quad O_f -$açıq çoxluqdur, $f-$hamar funksiyadır $\}$ çoxluğuna baxaq. Beləliklə, $D_v : C^\infty(P) \to R : f \to D_v f$ inikası qurulmuş oldu, burada $v \in T_P M$. Göstərmək olur ki, D_v inikası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$\forall f, g \in C^\infty(P), \alpha \in R \;, \quad D_v(f+g) = D_v(f) + D_v(g), \quad D_v(\alpha f) = \alpha D_v(f), \tag{1}$$

$$D_v(fg) = f(P)D_v(g) + g(P)D_v(f). \tag{2}$$

Sonuncu bərabərliyə Nyuton-Leybnis qaydası deyirlər. Beləliklə, $D_v -$ xətti inikasdır.

(1), (2) bərabərliklərini ödəyən $D : C^\infty(P) \to R$ inikasına diferensiallanma deyilir. Beləliklə, istənilən $v \in T_P M$ toxunan vektoru D_v diferensiallanmasını təyin edir.

Göstərmək olur ki, $D_P = \{D : C^\infty(P) \to R\}$ diferensiallanmalar çoxluğu R həqiqi ədədlər meydanı üzərində vektorlar fəzasıdır.

Teorem. *Toxunan fəzanın diferensiallanmalar fəzasına* $T_v M \to D_P : v \to D_v$ *inikası xətti izomorfizmdir.*

Bu teoremə əsasən, ixtiyari v toxunan vektoru D_v diferensiallanması ilə eyniləşdirilir. Qeyd edək ki, $D_v -$yə v toxunan vektoru boyunca diferensiallanma, $D_v f -$ə isə f hamar funksiyasının v toxunan vektoru boyunca törəməsi deyilir:

$$D_v f = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P v^i.$$

Mühazirə 7

Çoxobrazlı üzərində vektor meydanları

Tutaq ki, $M - n -$ölçülü hamar çoxobrazlıdır, A isə $M -$də açıq alt çoxobrazlı kimi başa düşülən açıq alt çoxluqdur (xüsusi halda $A = M$).

$A \subset M$ açıq alt çoxluğu üzərində vektor meydanı dedikdə hər bir $P \in A$ nöqtəsinə $X_P \in T_P A \cong T_P M$ toxunan vektorunu qarşı qoyan X inikası başa düşülür.

Tutaq ki, $X, Y - A$ açıq alt çoxluğu üzərində vektor meydanlarıdır, f isə A üzərində funksiyadır. A üzərində $X + Y$ və fX vektor meydanlarını aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$\forall P \in A, (X+Y)_P = X_P + Y_P, \quad (fX)_P = f(P)X_P. \tag{1}$$

Vektor meydanının hamarlığı anlayışını daxil edək. Əgər A üzərində (U,φ) lokal xəritəsi seçilərsə, onda $P\in U$ şərti daxilində hər bir toxunan $T_P M$ toxunan fəzasında $\partial_{1P},...,\partial_{nP}$ hərəkətli bazisi təyin olunar. Əgər $P\in U$ nöqtəsini dəyişsək, nəticədə U üzərində n sayda ∂_i vektor meydanlarını almış olarıq. U üzərində verilmiş X vektor meydanı üçün hər bir X_P toxunan vektorunu hərəkətli bazis üzrə ayırmaq olar: $X_P = f^1(P)\partial_{1P} + \cdots + f^n(P)\partial_{nP}$, burada $f^1(P),...,f^n(P)$ ilə X_P toxunan vektorunun koordinatları işarə olunmuşdur.

Əgər $P\in U$ nöqtəsini dəyişsək, nəticədə (1) əməllərinə əsasən,

$$X = f^1\partial_1 + \cdots + f^n\partial_n \tag{2}$$

ayrılışını alarıq, burada $f^1,...,f^n - U$ üzərində funksiyalardır.

(2) bərabərliyindəki $f^1,....,f^n$ funksiyalarına U üzərindəki X vektor meydanının (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri deyilir.

Əgər $A\subset M$ açıq alt çoxluğu üzərində X vektor meydanının M çoxobrazlısı üzərindəki istənilən (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri $U\cap A$ üzərində hamar funksiyalardırsa, onda X hamar vektor meydanı adlanır.

Göstərmək olur ki, iki hamar vektor meydanının cəmi və hamar vektor meydanının hamar funksiyaya hasilı hamar vektor meydanlarıdır. Doğrudan da, əgər $X = f^i\partial_i, Y = g^i\partial_i -$hamar vektor meydanları, $f -$hamar funksiyadırsa, onda

$$X + Y = (f^i + g^i)\partial_i, fX = ff^i\partial_i,$$

və hamar funksiyaların cəmi, eləcə də hasili hamar funksiyalardır.

$A\subset M$ açıq alt çoxluğu üzərində təyin olunmuş bütün hamar vektor meydanları çoxluğunu $\mathrm{X}(A)$ kimi işarə edirik. $X\in \mathrm{X}(A)$ vektor meydanı $(D_X f)(P) = D_{X_P} f$ qaydası ilə $D_X : C^\infty(A)\to C^\infty(A): f\to D_X f$ inikasını təyin edir. Bu inikas aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$\forall f, g \in C^{\infty}(A), \forall \alpha \in R, \quad D_X(f+g) = D_X f + D_X g,$$
$$D_X(\alpha f) = \alpha D_X f, \quad D_X(fg) = fD_X g + gD_X f.$$

Tutaq ki, $X, Y \in \mathrm{X}(A)$ vektor meydanları verilmişdir, burada $A - M -$də açıq alt çoxluqdur. A üzərində təyin olunmuş və ixtiyari (U, φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri $[X,Y]_U = (f^i \partial_i g^j - g^i \partial_i f^j)\partial_j$ şəklində olan vektor meydanına X və Y vektor meydanlarının kommutatoru deyilir və $[X,Y]$ kimi işarə olunur. Aşkardır ki, hərəkətli bazisin vektor meydanları üçün, $[\partial_i, \partial_j] = 0.$

Teorem. Kommutasiya əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $[X,Y] = -[Y,X]$, xüsusi halda $[X,X] = 0;$

b) $\forall \alpha, \beta \in R$, $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y].$

Mühazirə 8

Kovektor anlayışı. Vektorlar fəzasının qoşma fəzası. Kovektorun koordinatları

Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ ölçülü vektor fəzadır, $\{\vec{e}_i\}, i = \overline{1,n}$, -bu fəzanın müəyyən bazisidir. $\forall \vec{x} \in V$ vektoru üçün $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \cdots + x^n\vec{e}_n = x^i\vec{e}_i$ ayrılışı, digər $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisi üçün isə

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'}\vec{e}_i$$

keçid düsturu doğrudur, burada $(A^i_{i'})-$ keçid matrisi olub qeyri-məxsusidir, $i-$ toplama, yaxud «Eynşteyn» indeksidir. Əgər $\vec{x}$ vektorunun $\vec{x} = x^{i'}\vec{e}_{i'}$ ayrılışı da məlumdursa, onda

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i \qquad (1)$$

çevirməsi yazılır, burada $\left(A_i^{i'}\right) - \left(A_{i'}^{i}\right)$ keçid matrisinin tərs matrisidir. (1) çevirməsinə vektorun *koordinatlarının çevirmə qanunu* deyilir.

Vektor arqumentli $\alpha : V \to R$ skalyar funksiyası:

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ üçün

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y});$$

2) $\forall \vec{x} \in V, \forall \lambda \in V$ üçün

$$\alpha(\lambda \vec{x}) = \lambda \cdot \alpha(\vec{x})$$

şərtləri ödənildikdə *xətti funksiya* adlanır. Məsələn, $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} = x^i \vec{e}_i$ vektoru üçün $\alpha(\vec{x}) = x^1 + x^2 + x^3$ qaydası ilə təsir edən α funksiyası xətti funksiyadır.

V vektor fəzasında təsir edən bütün xətti funksiyalar çoxluğunu V^* ilə işarə edək. V^* çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməlləri bu qayda ilə daxil edilir:

1) $\forall \alpha, \beta \in V^*, \forall \vec{x} \in V$ üçün

$$(\alpha + \beta)(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x});$$

2) $\forall \alpha \in V^*, \forall \vec{x} \in V, \forall \lambda \in R$ üçün

$$(\lambda \alpha)(\vec{x}) = \lambda \cdot \alpha(\vec{x}).$$

Bu əməllər V^* çoxluğunu *kovenktor fəza* adlanan vektor fəzaya çevirirlər. V və V^* fəzaları *qoşma fəzalardır*. V^* kovektor fəzasının elementlərini *kovektorlar* adlandırırırlar və $\underset{\to}{\alpha}, \underset{\to}{\beta}, \underset{\to}{\gamma}, \ldots$ kimi işarə olunurlar. $\forall \underset{\to}{\alpha} \in V^*$ kovektoru üçün

$$\alpha_i = \underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i), i = \overline{1, n}$$

ədədləri $\underset{\to}{\alpha}$ *kovektorunun* $\{\vec{e}_i\}$ *bazisində koordinatları* adlanır.

V^* kovektor fəzasının

$$\underset{\to}{e}^j(\vec{e}_i) = \delta_i^j$$

şərtini ödəyən $\left\{\underset{\to}{e}^j\right\}, j = \overline{1, n}$ bazisinə $\{\vec{e}_i\}$ bazisi ilə *qarşılıqlı (qoşma) olan bazis* deyilir, burada δ_i^j – *Kroneker simvoludur*:

$$\delta_{i}^{j} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

$\underset{\rightarrow}{\alpha}$ kovektorunun $\{\vec{e}_i\}$ və $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazislərindəki α_i və $\alpha_{i'}$ koordinatları arasında aşağıdakı əlaqə doğrudur:

$$\alpha_{i'} = \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec{e}_{i'}) = \underset{\rightarrow}{\alpha}\left(A_{i'}^{i}\vec{e}_i\right) = A_{i'}^{i}\underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec{e}_i) = A_{i'}^{i}\alpha_i\,,$$

və ya

$$\alpha_{i'} = A_{i'}^{i}\alpha_i. \tag{2}$$

Mühazirə 9

Vektorlar fəzası üzərində tenzorlar

Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ölçülü vektor fəzadır, V^* isə V vektor fəzasına qoşma olan kovektor fəzadır. q sayda $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in V$ vektor və p sayda $\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p \in V^*$ kovektor arqumentlərindən asılı olan skalyar

$$z = t\left(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p\right) \tag{1}$$

funksiyasını təyin edək. (1) funksiyası arqumentlərinin hər birinə nəzərən xəttilik şərtlərini ödədikdə *polixətti funksiya* adlanır. Məsələn, 1-ci vektor arqumentinə görə xəttilik şərtləri belə yazılır:

$$t\left(\vec{v}_1' + \vec{v}_1'',\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p\right) = t\left(\vec{v}_1',\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p\right) +$$
$$+\, t\left(\vec{v}_1'',\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p\right),$$
$$t\left(k\cdot\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p\right) = k\cdot t\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p\right).$$

(1) polixətti funksiyasına həmçinin V vektor fəzası üzərində tipi (p,q) olan ($p \geq 0, q \geq 0$), yaxud p dəfə kontravariant və q dəfə kovariant *tenzor* deyilir. $s = p + q$ ədədi tenzorun valentliyi adlanır. Məsələn, valentliyi 2 olan tenzorlar $(2{,}0), (0{,}2)$ və $(1{,}1)$ tipli tenzorlardır. Tenzorlara dair nümunələrə baxaq.

1) (1,0) tipli $t\left(\underset{\rightarrow}{\eta}\right)$ tenzoru V vektor fəzasının vektorudur.

2) (0,1) tipli $t(\vec{v}_1)$ tenzoru V^* kovektor fəzasının kovektorudur.

3) (1,1) tipli tenzor $t(\vec{v},\underset{\rightarrow}{\eta})$ polixətti funksiyası ilə verilir və *afinor* adlanır.

V vektor fəzası üzərində təyin olunan bütün (p,q) tipli tenzorlar çoxluğu $T_q^p V$ ilə işarə olunur.

2. Tenzorlar üzərində aparılan əməlləri qeyd edək.

1^0. $t_1, t_2 \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 + t_2$ *cəmi*

$$(t_1 + t_2)(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^p) = t_1(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^p) +$$
$$+ t_2(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^p)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in V$, $\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p \in V^*$.

Qeyd. Yalnız eyni tipli tenzorları toplamaq mümkündür.

2^0. $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzor, k ixtiyari həqiqi ədəddirsə, onda t tenzorunun k ədədinə $k \cdot t$ *hasili*

$$(k \cdot t)(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^p) = k \cdot t(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^p)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in V$, $\underset{\rightarrow}{\eta}^1,\ldots,\underset{\rightarrow}{\eta}^p \in V^*$.

Göründüyü kimi, tenzorun ədədə hasili zamanı tip dəyişmir. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, $T_q^p V$ çoxluğu (p,q) tipli tenzorların toplanması və ədədə hasili əməllərinə görə vektor fəza təyin edir.

3^0. $t_1 \in T_{q_1}^{p_1} V,\ t_2 \in T_{q_2}^{p_2} V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 \otimes t_2$ *hasili*

$$(t_1 \otimes t_2)(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q_1}\vec{v}_{q_1+1},...,\vec{v}_{q_1+q_2},\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1},\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+1},...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+p_2}) =$$
$$= t_1(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q_1},\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1}) \cdot t_2(\vec{v}_{q_1+1},...,\vec{v}_{q_1+q_2},\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+1},...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+p_2}),$$

burada $\vec{v}_a \in V, a = 1,2,...,q_1 + q_2, \underset{\rightarrow}{\eta}^b \in V^*, b = 1,2,..., p_1 + p_2$.

Göründüyü kimi, $t_1 \otimes t_2$ -$(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ tipli tenzordur.

Tenzorların hasili əməlinin aşağıdakı xassələri vardır:

$a)\ t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3;$

$b)\ (t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_2;$

$c)\ (kt_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (kt_2) = k(t_1 \otimes t_2).$

Qeyd. Tenzorların hasili əməli yerdəyişmə (kommutativ-lik) xassəsinə malik deyil, yəni

$$t_1 \otimes t_2 \neq t_2 \otimes t_1.$$

4^0. Tutaq ki, $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzordur və $p > 0, q > 0.$ t tenzorunun m saylı vektor və k saylı kovektor arqumentlərinə görə *bükülməsi* dedikdə aşa-ğıdakı kimi təyin olunan $tr_m^k t \in T_{q-1}^{p-1} V$ tenzoru başa düşülür:

$$tr_m^k t\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{q-1}, \underset{\rightarrow}{\eta}^1, \ldots, \underset{\rightarrow}{\eta}^{p-1}\right) =$$

$$= t\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m-1}, \vec{e}_i, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_{q-1}, \underset{\rightarrow}{\eta}^1, \ldots, \underset{\rightarrow}{\eta}^{k-1}, \underset{\rightarrow}{e}^i, \underset{\longrightarrow}{\eta}^{k+1}, \ldots, \underset{\rightarrow}{\eta}^{p-1}\right),$$

burada $\{\vec{e}_i\}, i = 1,2,\ldots,n - V$ vektor fəzasının bazisidir, $\{\underset{\rightarrow}{e}^j\}$– onunla qoşma olan bazisdir və i toplama indeksi olbuğundan bu indeksə görə cəmləmə aparılır. Aydındır ki, bükülmə əməli vektor və ya kovektor arqumentlərindən hər hansı biri qurtarana qədər ardıcıl olaraq aparıla bilər.

5^0. Tutaq ki, $S_q - q$ dərəcəli əvəzləmələr qrupudur. S_q qrupunun $T_q^0 V$ tenzorlar fəzasında təsirini

$$\forall \sigma \in S_q,\ \forall t \in T_q^0 V,\ \ \sigma t(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q) = t(\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)})$$

düsturu ilə təyin edirik.

$t \in T_q^0 V$ tenzorunun *simmetrikləşməsi* dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $Sym\, t \in T_q^0 V$ tenzoru başa düşülür:

$$Sym\, t = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \sigma t.$$

Məsələn, $t \in T_2^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi

$$Sym\, t(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec{v}, \vec{w}) + t(\vec{w}, \vec{v})\right)$$

şəklində, $h \in T_3^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi isə

$$Sym\,t(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=\frac{1}{3!}\big(h(\vec{v},\vec{w},\vec{u})+h(\vec{w},\vec{u},\vec{v})+h(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+$$

$$+h(\vec{w},\vec{v},\vec{u})+h(\vec{v},\vec{u},\vec{w})+h(\vec{u},\vec{w},\vec{v})\big)$$

şəklində aparılır.

Qeyd edək ki, simmetrikləşmə əməli vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna da tətbiq oluna bilər. Məsələn, $t\in T_3^2V$ tenzorunun 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Sym_{1,3}\,t(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\to}{\eta},\underset{\to}{\xi})=\frac{1}{2!}\big(t(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\to}{\eta},\underset{\to}{\xi})+t(\vec{u},\vec{w},\vec{v},\underset{\to}{\eta},\underset{\to}{\xi})\big).$$

Tərif. $t\in T_q^0V$ tenzoru $\forall\sigma\in S_p$ əvəzləməsi üçün $\sigma t=t$ şərtini ödədikdə *simmetrik tenzor* adlanır. Tərifdən aydın olur ki, əgər $t\in T_q^0V$ - simmetrik tenzordursa, onda $Sym\,t=t$. Digər tərəfdən, $t\in T_3^2V$ tenzoru üçün $Sym_{1,3}\,t=t$ yazılışı onu göstərir ki, bu tenzor 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikdir.

6^0. $\sigma\in S_q$ əvəzləməsinin işarəsini $Sgn\,\sigma$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $Sgn\,\sigma$ cüt əvəzləmələr üçün 1-ə, tək əvəzləmələr üçün isə -1-ə bərabərdir.

$t\in T_q^0V$ tenzorunun *çəp-simmetrikləşməsi* , yaxud *alternasiyası* aşağıdakı kimi təyin olunan $Al\,t\in T_q^0V$ tenzoru na deyilir:

$$Al\,t=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}Sgn\,\sigma(\sigma t).$$

Tərifdən görünür ki, $t\in T_2^0V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi

$$Al\,t(\vec{v},\vec{w})=\frac{1}{2!}\big(t(\vec{v},\vec{w})-t(\vec{w},\vec{v})\big)$$

şəklində, $h\in T_3^0V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi isə

$$Al\,t(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=\frac{1}{3!}\big(h(\vec{v},\vec{w},\vec{u})+h(\vec{w},\vec{u},\vec{v})+h(\vec{u},\vec{v},\vec{w})-$$

$$-h(\vec{w},\vec{v},\vec{u})-h(\vec{v},\vec{u},\vec{w})-h(\vec{u},\vec{w},\vec{v})\big)$$

şəklində aparılır.

Çəp-simmetrikləşmə əməlini də vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna tətbiq etmək mümkündür. Məsələn, $t \in T_3^2 V$ tenzorunun 2-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə çəp-simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Al_{2,3}\, t\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right) = \frac{1}{2!}\left(t\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right) - t\left(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right)\right)$$

Tərif. $t \in T_q^0 V$ tenzoru $\forall \sigma \in S_p$ əvəzləməsi üçün $Sgn\sigma \cdot \sigma t = t$ şərtini ödədikdə *çəp-simmetrik tenzor* adlanır. Tərifə görə, əgər $t \in T_q^0 V$ - çəp-simmetrik tenzordursa, onda $Al\, t = t$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, simmetrik tenzorun alternasiyası və çəp-simmetrik tenzorun simmetrikləşməsi sıfra bərabərdir.

Mühazirə 10

Çoxobrazlı üzərində tenzor meydanları

Tutaq ki, $V - K$ meydanı üzərində vektor fəzadır və A- $A, B, C, \ldots$ elementlərinə malik olan çoxluqdur. A çoxluğunun elementlərini nöqtələr adlandıraq. Əgər hər bir nizamlanmış $(A, B) \in$ A×A elementlər cütünə aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi ilə $v = \overrightarrow{AB} \in V$ vektorunu qarşı qoyan A×A $\to V$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, A$- K$ meydanı üzərində afin fəzadır:

1) İstənilən $A \in$ A nöqtəsi və istənilən $v \in V$ vektoru üçün elə yeganə $B \in$ A nöqtəsi vardır ki, $v = \overrightarrow{AB}.$

2) İstənilən $A, B, C \in$ A nöqtələri üçün Şall münasibəti doğrudur:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0.$$

$\dim V = n$ olduqda afin fəza $n -$ölçülü qəbul olunur və A^n kimi işarə edilir. $V -$ A^n afin fəzası üçün yönəldici vektor fəza adlandırılır.

İxtiyari qaydada seçilmiş $O \in$ A nöqtəsini qeyd edək. Bu halda $\forall A \in$ A nöqtəsi üçün bu nöqtənin radius-vektoru adlandı-rılan $x = \overrightarrow{OA}$ vektoru birqiymətli təyin olunur. $V -$də $\{e_i\}$ bazi-sini seçməklə $x = x^i e_i$ ayrılışını alarıq. x^i ədədlərinə $A(x)$ nöqtə-sinin $\{O, e_i\}$ reperində afin (və ya dekart) koordinatları deyilir.

V yönəldici vektor fəzası psevdo-Evklid vektor fəzası ol-duqda A – afin-psevdo-Evklid (və ya psevdo-Evklid) fəzası adlandırılır.

A^n afin fəzasının nöqtəsində T_x toxunan fəzası başlanğı-cı bu nöqtədə olan bütün vektorların əmələ gətirdiyi eyni ölçülü
vektor fəzadır. Müxtəlif nöqtələrdəki toxunan fəzalar öz araların-da paralel köçürmə vasitəsilə təbii olaraq eyniləşdirilə bilər.

$U \in$ A^n oblastını nəzərdən keçirək. Əgər U oblastının hər bir nöqtəsinə bu nöqtədəki toxunan fəzada (p,q) tipli tenzoru qarşı qoyan $x \to t_x$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, U oblastın-da (p,q) tipli t tenzor meydanı verilmişdir. Başqa sözlə, bu hal-da arqumentləri T_x və T_x^* fəzalarından olan və həm də nöqtənin seçimindən asılı olan polixətti funksiyaya baxılır. Məsələn, $p = 1$,
$q = 2$ olduqda $t_x(\xi, u, v)$ polixətti funksiyası təyin olunur. Əgər $\{O, e_i\}-$ A^n-də dekart reperdirsə, onda

$$t_x = t^i_{jk}\left(x^1,...,x^n\right)\xi_i u^j v^k . \qquad (1.1)$$

U oblastında verilmiş $t^i_{jk}(x)$ funksiyalarına tenzor meydanının koordinatları deyilir. Əgər $t^i_{jk}(x)$ funksiyaları C^k sinfindən olan hamar funksiyalardırsa, deyəcəyik ki, $t - C^k$ sinfindən olan ha-mar tenzor meydanıdır. $t^i_{jk} = const$ olduqda , tenzor meydanı sabit tenzor meydanı adlanır.

Tenzorlar üzərində aparılan əməllər təbii olaraq nöqtələr üzrə aparılmaqla tenzor meydanlarına tətbiq edilir. Məsələn, eyni tipli t və s tenzorları üçün toplama əməli

$$(t + s)_x = t_x + s_x$$

şəklində aparılır.

Tenzor meydanları üzərində yeni bir əməl- diferensialla-ma əməli də aparılır. Polixətti funksiyanın diferensialını hesabla-dıqda nəzərə almaq lazımdır ki, dekart reperi halında vektor və kovektor arqumentlərinin koordinatları nöqtənin seçimindən asılı deyil. Məsələn, (1,1) tenzoru üçün

$$dt = dt^i_{jk}(x)\xi_i u^j v^k \,. \qquad (1.2)$$

Beləliklə, $dt-(1,2)$ tipli tenzor meydanıdır, dt^i_{jk} diferensialları onun dekart reperə nəzərən koordinatlarıdır.

Misal 1. A^n-də nöqtələrin radius-vektorlarının meydanı-na baxaq. Dekart reperə nəzərən $x = x^i e_i$ ayrılışını yaza bilərik. Diferensiallamaqla, koordinatları $dx^i = e^i(dx)$ olan $dx = dx^i e_i$ vektor meydanını alarıq.

Diferensialların aşağıdakı xassələri doğrudur:

a) Tenzor meydanının diferensialının sıfra bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt onun sabit olmasıdır (istənilən dekart reperdə $t^i_{jk} = const$ olmasıdır);

b) Tenzor meydanlarının cəminin diferensialı onların dife-rensialları cəminə bərabərdir: $d(t+s) = dt + ds.$

c) Tenzor hasilinin diferensialı Leybnis qaydası ilə hesab-lanır: $d(t \otimes s) = dt \otimes s + t \otimes ds.$ Əgər xüsusi halda, $t-$ədəddirsə, onda $d(ts) = tds.$

d) Bükülmə əməli diferensiallama əməli ilə yerini dəyişə bilər:

$$tr^k_m(dt) = d(tr^k_m t).$$

Tenzor meydanının koordinatlarının diferensiallarını xü-susi törəmələrlə ifadə etməklə alarıq:

$$dt = \partial_s t^i_{jk}\xi_i u^j v^k dx^s, \qquad \partial_s t^i_{jk} = \frac{\partial t^i_{jk}}{\partial x^s}. \qquad (1.3)$$

Misal 1-i nəzərə almaqla belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\partial_s t^i_{jk}$ funksi-yaları (1,3) tipli tenzor meydanının koordinatlarıdır. Bu tenzor meydanı t tenzor meydanının törəməsi adlanır və ∂t kimi işarə olunur. Ümumi halda (p,q) tipli tenzor meydanının törəməsi $(p,q+1)$ tipli tenzor meydanıdır. Törəməni verilmiş $w = w^i(x)e_i$ vektor meydanı ilə diferensiallama indeksi üzrə bükməklə yeni-dən (p,q) tipli

$$\partial_w t = tr^1_1(w \otimes \partial t) \qquad (1.4)$$

tenzor meydanını alarıq. $\partial_w t - w$ vektor meydanı istiqaməti üzrə törəmə adlanır. Məsələn, $\partial_w t^i_{jk} = w^s \partial_s t^i_{jk}$.

<u>Misal 2</u>. Tutaq ki, $\varphi(x^1,...,x^n) - U \subset$ A^n oblastında təyin olunmuş skalyar meydandır. Onda $\partial_s \varphi - grad\varphi$ kimi işarə olu-nan və φ meydanının qradiyenti adlandırılan kovektor meydanı-nın koordinatlarıdır. Əgər yönəldici vektor fəza psevdo-Evklid fəzasıdırsa, onda indeksi qaldırmaqla, koordinatları ilə aşağıdakı kimi ifadə olunan vektor meydanını alarıq:

$$grad\varphi = \left(g^{ij}\partial_j \varphi\right)e_i.$$

φ potensial funksiya, $grad\varphi$ isə potensial vektor meydanı adlanır. İstiqamət üzrə törəmə skalyar hasilin köməyi ilə ifadə oluna bilər:

$$\partial_w \varphi = w^i(x)\partial_i \varphi = g(w, grad\varphi).$$

<u>Misal 3</u>. Tutaq ki, $\xi -$kovektor meydanıdır. $\partial\xi$ törəmə-sinin alternasiyasını aparaq və nəticəni 2-yə vuraq:

$$rot\xi = 2 \cdot Al(\partial\xi).$$

$rot\xi -$koordinatları $S_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$ olan tenzor meydanıdır və ξ kovektor meydanının rotasiyası adlanır.

<u>Misal 4</u>. Tutaq ki, $v -$vektor meydanıdır. Onun törəməsi koordinatları $\partial_j v^i$ olan $(1,1)$ tipli tenzor meydanıdır. Bu tenzor meydanının $tr(\partial v)$ izi $v -$nin divergensiyası adlandırılan invari-antdır. Psevdo-Evklid fəzada divergensiyanı

$$div\, v = \partial_i v^i = g^{ij}\partial_i v_j$$

şəklində yaza bilərik. Bu invariant sıfra bərabər olduqda $v -$ solenoidal vektor meydanı adlanır.

Tutaq ki, $v - U \subset$ A^n oblastında təyin olunmuş vektor meydanıdır. $v -$nin inteqral xətləri (və ya trayektoriyaları) dedikdə toxunan vektorları meydanın vektorları ilə üst-üstə dü-şən, yəni $\frac{dx}{dt} = v(x(t))$ münasibətini ödəyən $x = x(t)$ parametri-zasiya olunmuş əyriləri başa düşülür. Bu münasibəti koordinat-larla yazmaqla,

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\left(x^1(t),\ldots,x^n(t)\right) \qquad (1.5)$$

adi diferensial tənliklər sistemini alarıq. (1.5) sisteminin inteq-rallanması inteqral xətlərini təyin etməyə imkan verir.

Mühazirə 11

Riman çoxobrazlısı

Tutaq ki, $M-$hamar çoxobrazlıdır və M üzərində simmetrik bixətti formalar meydanı verilmişdir, yəni hər bir $P \in M$ nöqtəsi üçün $T_P M$ toxunan fəzasında simmetrik bixətti $s_P : T_P M \times T_P M \to R$ forması verilmişdir. Bu meydanı s ilə işarə edək.

M üzərində (U,φ) lokal xəritəsi üçün hərəkətli bazisin $\partial_1,\ldots,\partial_n$ vektor meydanlarını təyin edirik.

M üzərində s simmetrik bixətti formalar meydanının (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri U üzərində

$$s_{ij} = s(\partial_i,\partial_j), 1 \le i,j \le n$$

şəklində təyin olunmuş funksiyalardır.

Əgər s simmetrik bixətti formalar meydanının M üzərində istənilən (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri U üzərində hamar funksiyalardırsa, onda deyirlər ki, s meydanı hamardır.

M hamar çoxobrazlısı üzərində Riman metrikası dedikdə hər bir $P \in M$ nöqtəsinə $g_P : T_P M \times T \times M \to R$ skalyar hasilini qarşı qoyan müsbət-müəyyən simmetrik bixətti formaların hamar g meydanı başa düşülür. (M,g) cütünə Riman çoxobrazlısı deyilir.

M Riman çoxobrazlısı üzərində istənilən (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən g Riman metrikasının komponentləri $g_{ij} = g(\partial_i,\partial_j)$ şəklində təyin olunurlar.

Tutaq ki, $\gamma : I \to M - M$ çoxobrazlısı üzərində hamar əyridir. Onda hər bir $t \in I$ üçün bu əyri $T_\gamma(t)$ toxunan vektorunu təyin edir. Nəticədə γ əyrisinin toxunan vektor meydanı adlanan $T_\gamma : t \to T_\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ inikası təyin olunur.

M Riman çoxobrazlısı üzərində istənilən hamar $\gamma : I \to M$ əyrisi üçün hər bir $t-$yə $T_\gamma(t)$ toxunan vektorunun uzunluğunun kvadratını qarşı qoyan

$$I \to R : t \to g_{\gamma(t)}(T_\gamma(t), T_\gamma(t))$$

funksiyasını təyin etmək mümkündür.

M Riman çoxobrazlısı üzərində γ hamar xəttinin t_1, t_2 nöqtələri arasında qalan qövsünün uzunluğu

$$l_{t_1}^{t_2}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}(T_\gamma(t), T_\gamma(t))}dt \qquad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

Əgər γ əyrisinin $\gamma(I)$ obrazı (U, φ) lokal xəritəsinin oblastında yerləşərsə, onda (1) düsturunu

$$l_{t_1}^{t_2}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\widetilde{g}_{ij}(u^1(t),...,u^n(t))\frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt}}dt$$

şəklində yazmaq olar, burada $\widetilde{g}_{ij} = g_{ij} \circ \varphi^{-1}$ işarə olunmuşdur.

Mühazirə 12

Çoxobrazlı üzərində afin rabitə

Hamar çoxobrazlı üzərində təyin olunan əsas diferensial – həndəsi strukturlardan biri də afin rabitədir. M çoxobrazlısı üzərində afin rabitə aşağıdakı şərtləri ödəyən

$$\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$$

inikasına deyilir:

1) $\forall V, U \in X(M)$ üçün

$$\nabla(U,V)=\nabla_U V \in X(M);$$

2) $\forall V,U \in X(M)$, $\forall f \in F(M)$ üçün

$$\nabla f_U V = f\,\nabla_U V\,,$$

burada $F(M)-M$ çoxobrazlısı üzərində hamar funksiyalar çoxluğudur;

3) $\forall V,U \in X(M)$, $\forall g \in FM$ üçün

$$\nabla_V(gU)=g\nabla_V U + U\mathscr{V}(g),$$

burada $\mathscr{V}(g)=\dfrac{\partial g}{\partial x^i}\mathscr{V}^i - g$ funksiyasının V vektor meydanı boyunca törəməsidir.

U,V vektor meydanlarını ∂_i və ∂_j bazis vektor meydanları ilə əvəz edək və $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ vektor meydanını $\{\partial_k\}$, $k=1,2,...,n$ bazisi ayıraq:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k\,.$$

(1)

1) – 3) şərtlərindən istifadə edərək, göstərmək olur ki, (1) bərabərliyinin sağ
tərəfindəki ayrılış əmsalları tenzor qanunu ilə deyil, aşağıdakı qaydada dəyişirlər:

$$\Gamma^{k'}_{ij'} = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\Gamma^k_{ij} + \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right).$$

Bundan ötrü $x',...,x^n$ lokal koordinantlarından $x^{1'},x^{2'},...,x^{n'}$ lokal koordinantlarına

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$$

keçid düsturlarına baxaq. Yəni $x^{1'},...,x^{n'}$ lokal koordinant sistemində

$$\nabla_{\partial_{i'}}\partial_{j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}\partial_{k'}$$

ayrılışını yaza bilərik.

$\partial_{k'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\partial_k$ olduğundan,

$$\nabla_{\partial_{i'}}\partial_{j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}\partial_{k'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\ \partial_k .$$

Digər tərəfdən,

$\partial_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i$, $\partial_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\partial_j$ olduğuna görə, ∇ afin rabitəsinin tərifinə əsasən yaza bilərik:

$$\nabla_{\partial_{i'}}\partial_{j'} = \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\partial_j\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_{\partial_i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\partial_j\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\partial_j\right) =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\nabla_{\partial_i\partial_j} + \partial_{i'}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\partial_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\partial_k + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\partial_j =$$

$$= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right)\partial_k .$$

Beləliklə,

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\partial_k = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right)\partial_k ,$$

və ya

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)$ keçid matrisinin tərs matrisinin $\frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}$ komponentlərinə vuraq:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k} = \Gamma^k_{i'j'}\delta^{e'}_{k'} = \Gamma^{e'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} ,$$

və ya

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} .$$

Γ^k_{ij} əmsalları ∇ afin rabitəsinin əmsalları adlanır. Rabitə əmsalları $\nabla_{\mathscr{V}}U$ vektor meydanının ifadəsini təyin etməyə imkan verir:

$$\nabla_{\mathscr{V}}U = \mathscr{V}^i\left(\partial_i U^k + \Gamma^k_{ij}U^j\right)\partial_j = \mathscr{V}^i\left(\nabla_i U^k\right)\partial_k .$$

$\nabla_i U^k = \left(\partial_i U^k + \Gamma_{ij}^k U^j\right)$ ifadəsi U vektor meydanının ∇ afin rabitəsində kovariant törəməsi adlanır . Analoji qayda ilə ixtiyari α kovektor meydanının, həmçinin M çoxobrazlısı üzərində verilmiş ixtiyari (p,q) tipli t tenzor meydanının kovariant törəməsini hesablamaq olar:

$$\nabla_i \alpha_i = \partial_j \alpha_i - \Gamma_{ij}^k \alpha_k \,,$$

$$\nabla_k t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} = \partial_k t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} - \Gamma_{k j_1}^m t_{m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} - \ldots - \Gamma_{k j_q}^m t_{j_1 \ldots m}^{i_1 \ldots i_p} + \Gamma_{k_m}^{i_1} t_{j_1 \ldots j_q}^{m \ldots i_p} + \ldots + \Gamma_{k_m}^{i_p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m} \,.$$

Mühazirə 13

Paralel köçürmə və geodezik əyrilər

Tutaq ki, $M-$hamar çoxobrazlıdır, $\gamma : I \to M - M$ üzərində hamar əyridir.

γ əyrisi boyunca vektor meydanı dedikdə hər bir $t \in I$ nöqtəsinə $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ toxunan vektorunu qarşı qoyan $X : t \to X(t)$ inikası başa düşülür.

Tutaq ki, M çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsi verilmişdir və $\Gamma_{ij}^k -$rabitə funksiyalarıdır. Əgər $X(t) - \gamma(t)$ əyrisi boyunca hamar vektor meydanıdırsa, onda $\nabla_{T_\gamma(t)} X(t) = \nabla_{T_\gamma} X(t)$ kovariant törəməsini təyin etmək mümkündür.

∇ afin rabitəsinə malik hamar M çoxobrazlısı üzərində γ hamar əyrisi boyunca verilmiş $X(t)$ vektor meydanı $\nabla_{T_\gamma} X(t) = 0$ bərabərliyi ödənildikdə γ əyrisi boyunca paralel vektor meydanı adlanır.

γ əyrisinin obrazı (U,φ) lokal xəritəsinin oblastında yerləşdikdə, $T_\gamma(t) = \dfrac{du^i(t)}{dt} \partial_{i_{\gamma(t)}}$ olur. Əgər $X(t) = f^i(t) \partial_{i_{\gamma(t)}}$-$\gamma$ əyrisi boyunca verilmiş vektor meydanıdırsa, onda $X(t)$ vektor meydanı yalnız və yalnız

$$\frac{df^k(t)}{dt} + \frac{du^i(t)}{dt} f^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0 \qquad (1)$$

münasibəti ödənildikdə γ əyrisi boyunca paralel olur. Qeyd edək ki, (1) sistemi $f^k(t)$ funksiyalarına nəzərən adi xətti diferensial tənliklər sistemidir.

γ əyrisi boyunca t_0 nöqtəsindən t_1 nöqtəsinə paralel köçürmə dedikdə

$$\|\gamma_{t_1}^{t_0} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M : X_0 \to X(t_1)$$

Inikası başa düşülür, burada $X(t) - \gamma$ əyrisi boyunca elə paralel vektor meydanıdır ki, $X(t_0) = X_0$.

Tutaq ki, ∇ afin rabitəsinə malik M hamar çoxobrazlısı üzərində γ əyrisi verilmişdir. Əgər $T_\gamma(t)$ toxunan vektor meydanı γ əyrisi boyunca paraleldirsə, yəni $\nabla_{T_\gamma} T_\gamma(t) = 0$ şərti ödənilirsə, onda γ geodezik əyri adlanır.

Teorem. İxtiyari $P_0 \in M$ nöqtəsi və ixtiyari toxunan $X_0 \in T_{P_0}M$ vektoru üçün $\varepsilon > 0$ ədədi və elə yeganə $\gamma : \left]-\varepsilon;\varepsilon\right[\to M$ geodezik xətti vardır ki, $\gamma(0) = P_0, T_\gamma(0) = X_0$.

Mühazirə 14

Levi-Çivita (Riman) rabitəsi

Qeyd olunduğu kimi, X_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində Riman metrikası $(0,2)$ tipli simmetrik, cırlaşmayan (qeyri-məxsusi) kovarinat g_{ij} tenzor meydanının verilməsi ilə təyin edilir. Fərz edək ki, X_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində g_{ij} Riman metrikası və simmetrik $\nabla = \{\Gamma_{kj}^i\}$ afin rabitəsi ($\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ və ya $S_{kj}^i = 0$) verilmişdir.

Əgər g_{ij} metrikası və $\nabla = \{\Gamma_{kj}^i\}$ simmetrik afin rabitəsi üçün $\nabla_k g_{ij} = 0$ şərti ödənilərsə, onda ∇ afin rabitəsinə g_{ij} metrikası ilə əlaqələndirilmiş afin rabitə (və ya Levi-Çivita rabitəsi) deyilir. Levi-Çivita rabitəsinə Riman rabitəsi də deyirlər. Levi-Çivita rabitəsinin varlığı və yeganəliyinə dair aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem1.1. Tutaq ki, $g_{ij}-X_n$ çoxobrazlısı üzərində Riman metrikasıdır. Onda g_{ij} metrikası ilə əlaqələndırılmış yeganə simmetrik afin rabitə vardır və bu rabitənin əmsalları

$$\Gamma^i_{kj}=\frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^\alpha}\right) \tag{1}$$

düsturları ilə hesablanır.

İsbatı. Fərz edək ki, Riman rabitəsinin varlığı isbat olunmuşdur. Bu rabitənin yeganəliyini əsaslandıraq. Tərifə görə

$$\nabla_k g_{ij}=0 .$$

∇ afin rabitəsi Γ^i_{kj} rabitə əmsalları ilə verildiyindən göstərmək kifayətdir ki, Γ^i_{kj} əmsalları (1) sistemindən g_{ij} komponentlərinin və $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$ xüsusi törəmələrinin funksiyaları kimi birqiymətli təyin olunur. (1) sistemini açıq şəkildə yazaq:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}-\Gamma^\alpha_{ki}g_{\alpha j}-\Gamma^\alpha_{kj}g_{\alpha j}=0$$

və ya

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}=\Gamma^\alpha_{ki}g_{\alpha j}+\Gamma^\alpha_{kj}g_{\alpha j} . \tag{2}$$

(2) bərabərliyinin hər iki tərəfində ardıcıl olaraq iki dəfə i,j və k indekslərinin yerini saat əqrəbi istiqamətində dəyişək:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}=\Gamma^\alpha_{ij}g_{\alpha k}+\Gamma^\alpha_{ik}g_{j\alpha} , \tag{3}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}=\Gamma^\alpha_{jk}g_{\alpha i}+\Gamma^\alpha_{ji}g_{k\alpha} \tag{4}$$

(3) və (4) bərabərliklərini tərəf- tərəfə toplayaraq, alınmış bərabərlikdən (2) bərabərliyini tərəf-tərəfə çıxaq və bu zaman ∇ afin rabitəsinin simmetrikliyini nəzərə alaq:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=2\Gamma_{ij}^{\alpha}g_{\alpha k} \tag{5}$$

Qeyd edək ki, g_{ij} metrik tenzor meydanı üçün $\|g_{ij}\|$ qeyri-məxsusi matris olduğundan bu matrisin

$$g_{i\alpha}\,g^{\alpha k}=\delta_i^k=\begin{cases}0, & k\neq i\\ 1, & k=i\end{cases} \tag{6}$$

münasibəti ilə qurulan $\|g^{\alpha k}\|$ tərs matrisi X_n çoxobrazlısı üzərində $(2{,}0)$ tipli tenzor meydanı təyin edir. (5) bərabərliyinin hər iki tərəfini g^{ke} komponentlərinə vuraq və bu zaman (6) münasibətini nəzərə alaq:

$$2\Gamma_{ij}^{\alpha}g_{\alpha k}g^{ke}=2\Gamma_{ij}^{\alpha}\delta_{\alpha}^{e}=2\Gamma_{ij}^{e}=g^{ke}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

və ya

$$\Gamma_{ij}^{e}=\frac{1}{2}g^{ke}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, əgər Levi-Çivita rabitəsi vardırsa, onda bu rabitə yeganədir. Levi-Çivita rabitəsinin varlığının isbatı üçün Γ_{kj}^{i} əmsallarını yuxarıda qeyd olunan düsturlarla təyin etmək kifayətdir. Aydındır ki, bu halda eyni hesablamaları tərs nizamda aparmaqla $\nabla_k g_{ij}=0$ nəticəsinə gəlmək olar. Bu isə teoremin isbatı deməkdir.

Mühazirə 15

Afin rabitənin buruqluq və əyrilik tenzor meydanları

∇ afin rabitəsinin buruqluq tenzoru dedikdə aşağıdakı münasibətlə təyin olunan (1,2) tipli tenzor başa düşülür:

$$S(V,U) = \nabla_V U - \nabla_U V - [V,U] \quad , \quad \forall U,V \in X(M)$$

burada, $[\mathscr{V},U]$ - V və U vektor meydanlarının kommutatoru və ya $\mathscr{L}_i$ mötərizəsidir. Kommutator dedikdə aşağıdakı münasibətlə təyin olunan meydanı başa düşülür:

$$[V,U](f) = \mathscr{V}(U(f)) - U(\mathscr{V}(f)),$$

burada $f \in F(M)$, $U(f) = U^i \partial_i f$. $[V,U]$ kommutatorunun koordinantlarını hesablayaq. Bundan ötrü $V = \mathscr{V}^i \partial_i$ və $U = U^j \partial_j$ olduğunu nəzərə alaq:

$$[V,U](f) = V(U(f)) - U(V(f)) = V\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \mathscr{V}^i\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \left(\mathscr{V}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right) =$$

$$= \mathscr{V}^i\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \left(\mathscr{V}^i \frac{\partial U^i}{\partial x^i} - U^j \frac{\partial \mathscr{V}^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} =$$

$$= \left(\mathscr{V}^m \partial_m U^i - U^m \partial_m \mathscr{V}^i\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Buradan aydın olur ki, $[V,U]$ vektor meydanı

$$[V,U]^i = \mathscr{V}^m \partial_m U^i - U^m \partial_m \mathscr{V}^i$$

komponentlərinə malikdir.

Buruqluq tenzorunun koordinantlarını ∇ rabitəsinin əmsalları ilə ifadə etmək mümkündür. Doğurdan da, əgər V və U vektor meydanlarını ∂_i və ∂_j koordinant vektor meydanları ilə əvəz etsək, yaza bilərik:

$$S(\partial_i, \partial_j) = S_{ij}^k \partial_k = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = \Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k -$$

$$-\left(\delta_i^m \partial_m \delta_j^k - \delta_j^m \partial_m \delta_i^k\right)\partial_k = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right)\partial_k$$

Bu bərabərlikdən müəyyən edirik:

$$S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

∇ afin rabitəsinin əyrilik tenzoru dedikdə aşağıdakı münasibətə təyin olunan (1,3) tipli tenzor meydanı başa düşülür:

$$R(U,V,W) = \nabla_{\mathscr{V}} \nabla_U W - \nabla_U \nabla_V W - \nabla_{[V,U]} W \, , \quad \forall \mathscr{V},U,W \in X(M).$$

Əyrilik tenzorunun komponentlərini təyin etmək üçün V, U, W vektor meydanlarını uyğun olaraq, $\partial_i, \partial_j, \partial_k$ koordinant vektor meydanları ilə əvəz edək:

$$R(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = R_{ij\,k}^{e}\partial_e = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k = \nabla_{\partial_i}\left(\Gamma_{jk}^{m}\partial_m\right) - \nabla_{\partial_j}\left(\Gamma_{ik}^{m}\partial_m\right) =$$

$$= \partial_i \Gamma_{jk}^{m}\,\partial_m + \Gamma_{jk}^{m}\,\nabla_{\partial_i}\partial_m - \partial_j \Gamma_{ik}^{m}\,\partial_m - \Gamma_{ik}^{m}\,\nabla_{\partial_j}\partial_m =$$

$$= \partial_i \Gamma_{jk}^{m}\,\partial_m + \Gamma_{jk}^{m}\,\Gamma_{im}^{e}\partial_e - \partial_j \Gamma_{ik}^{m}\,\partial_m - \Gamma_{ik}^{m}\,\Gamma_{jm}^{e}\partial_e =$$

$$= \left(\partial_i \Gamma_{jk}^{e} - \partial_j \Gamma_{ik}^{e} + \Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{im}^{e} - \Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{e}\right)\partial_e\,.$$

Bu münasibətdən aydın olur ki, əyrilik tenzoru aşağıdakı komponentlərə malikdir ([12, səh 188]):

$$R_{ijk}^{e} = \partial_i \Gamma_{jk}^{e} - \partial_j \Gamma_{ik}^{e} + \Gamma_{im}^{e}\,\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{e}\,\Gamma_{ik}^{m}\;.$$